

Моделирование железнодорожного пути переменной жесткости при динамических воздействиях на верхнее строение

Рассматривается задача создания математической модели железнодорожного полотна переменной жесткости, в которой учтены возможности изменения скоростного и грузонапряженного режима движения транспортных средств. Предложена модель конструкции в виде сочлененных плоских слоев.



А. А. Локтев, д-р физ.-мат. наук, профессор, декан факультета информатизации, экономики и управления, заведующий кафедрой «Транспортное строительство» Московского государственного университета путей сообщения Императора Николая II (МИИТ)



Г. Н. Талашкин, канд. экон. наук, профессор кафедры экономики и строительного бизнеса и управления собственностью МИИТ, президент Союза строителей железных дорог



К. Д. Степанов, аспирант кафедры «Теоретическая механика и аэродинамика» Национального исследовательского Московского государственного строительного университета

В нашей стране железнодорожное сообщение строится по принципам использования одних и тех же путей для грузоперевозок, когда основным считается перемещаемый вес, и пассажирских перевозок, когда на первый план выходит скорость доставки пассажиров. До сих пор железнодорожный путь переменной жесткости использовался только на подъездах к мостам и другим искусственным сооружениям. За редким исключением, когда железнодорожные пути используются для доставки грузов на предприятия или для организации высокоскоростного движения, в России еще долго одни и те же пути будут использоваться для грузовых и пассажирских перевозок. Поэтому создание математической модели железнодорожного пути переменной жесткости, в которой допускалась бы возможность изменения геометрических и механических параметров в зависимости от характеристик движения экипажа и которую можно реализовать, весьма актуально.

Возможность создания полотна переменной жесткости рассматривается достаточно давно. Имеющиеся инженерные решения чаще всего относятся к местам примыкания верхнего строения железнодорожного пути, расположенного на мосту и на земляном полотне. В указанных местах наблюдаются просадки, хотя систематически выполняются работы по устране-

нию неравномерного пучения, вызванного неровностями на основной площадке земляного полотна, и по выправке пути в профиле. Просадки пути перед устоями моста, называемые предмостовыми ямами (рис. 1), образуются вследствие накопления остаточных деформаций в балластном слое и в земляном полотне. По этой причине необходима систематическая выправка элементов верхнего строения пути. Это существенно снижает уровень безопасности движения поездов и требует ограничения скоростного режима.

Деформирование верхнего строения пути обусловлено тем, что упругие характеристики земляного полотна и мостового пролетного строения существенно различаются. Вследствие этого жесткость пути при переходе с земляного полотна на пролетное строение резко изменяется. Скачок жесткости пути приводит к появлению дополнительных динамических нагрузок и к росту колебаний в балластном слое. На примыкающих подходах могут накапливаться осадки уплотненного балласта под рельсошпальной решеткой. Верхний слой насыпи толщиной до 3 м также может накапливать осадку под динамическим воздействием подвижного состава. Этому способствуют загрязненность балласта, повышенная увлажненность основной площади и более высокие вибрации земляного полотна в зоне устоев. В отдельных случаях остаточные деформации на уровне верхнего строения пути могут образовываться под действием атмосферных осадков, вызывающих подтопление основания.

Из отечественного и зарубежного опыта строительства известны разные конструкции переменной жесткости. Приведем пять основных способов получения переменной жесткости на переходном участке.

1. Конструкция участка переходного пути из железобетонных коробов, заполненных щебнем [1, 2], за счет боковых сте-



Рис. 1. Общий вид предмостовой ямы

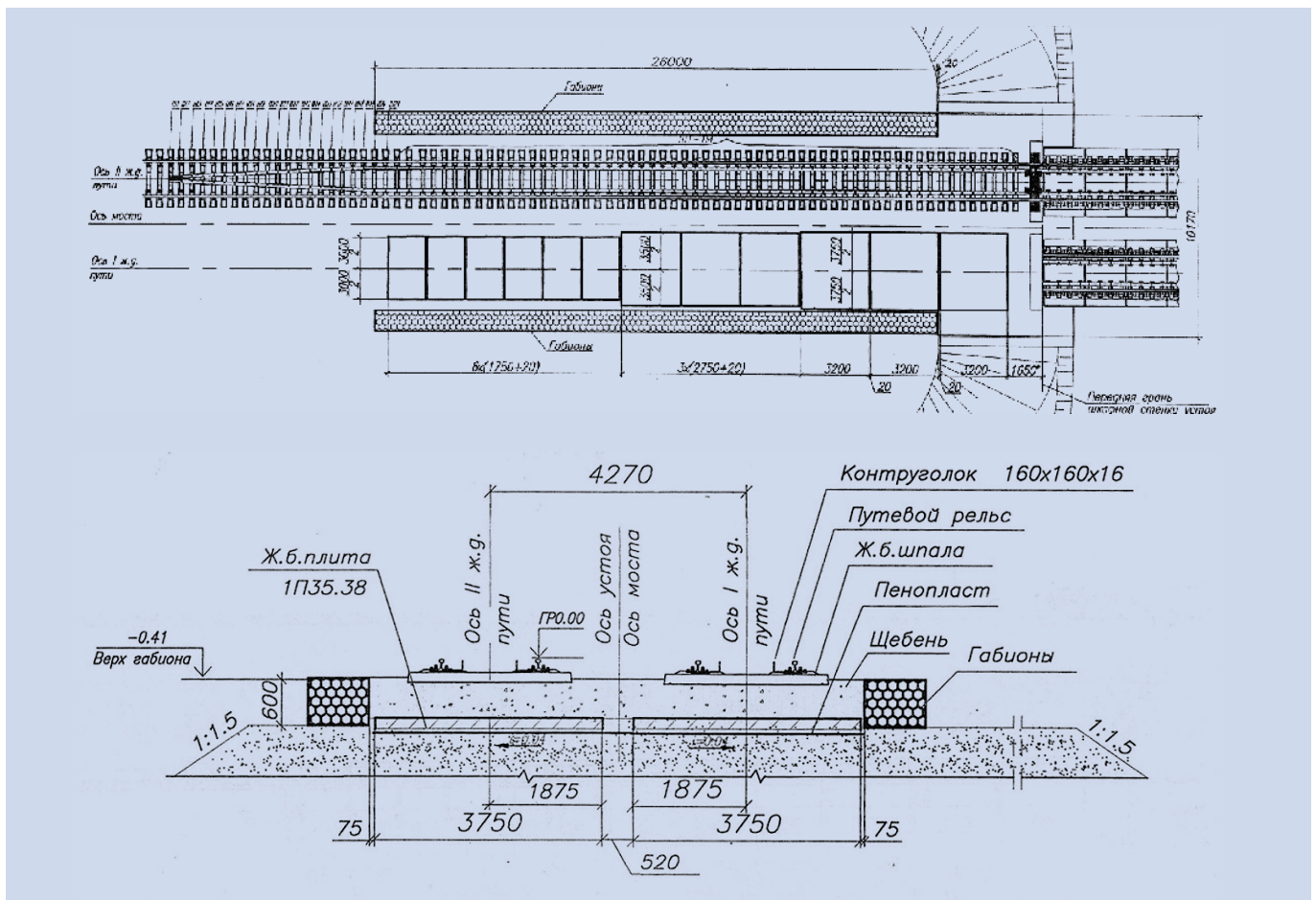


Рис. 2. Конструкция переменной жесткости с железобетонными плитами

нок обеспечивает резкое сокращение интенсивности накопления осадок балласта, предотвращая его боковое расползание. Плавное изменение жесткости пути достигается применением коробов разной высоты по всей длине переходного участка (с постепенным изменением высоты коробов от 1,5 м вблизи устья моста до 0,8 м в месте сопряжения с обычным путем).

2. При устройстве участка переходного пути с подбалластными железобетонными плитами (рис. 2) для плавного отвода жесткости тела насыпи применяются плоские железобетонные плиты переменной ширины (в поперечном к оси пути направлении). Комплект плит, начиная от задней грани устья, состоит из плит трехступенчатого переходного участка пути переменной жесткости [1, 2]. Для исключения боковых деформаций балласта со стороны обочин укладываются габрионы (строительные блоки, сооружаемые вручную из металлической сетки и щебня), заполненные камнем, а для отвода воды предусмотрена замена грунта на дренирующий слой за шкафной стенкой устья.

3. Переходный участок с применением габрионов устраивается при замене грунта насыпи на щебень, который укладывается с послойным уплотнением между стенками габрионов, заполненных камнем [1, 2]. Срезка грунта насыпи осуществляется в каждом сечении на расчетную глубину, обеспечивающую плавное повышение модуля упругости пути [3]. Пространство между габрионами заполняется щебнем, который тщательно уплотняется катками или вибраторами. Затем поверх габрионов и уплотненного щебня вновь укладывается оцинкованная металлическая сетка и посредством скрутки объединяется с габрионами.

4. Приобретает популярность альтернативная конструкция переходного участка, основанная на армировании земляного полотна насыпи бетонными или набивными сваями переменной длины с уплотнением верхнего слоя насыпи. Для устройства такой конструкции необходимы стреловой кран и специальное оборудование для забивки свай.

5. С появлением геосинтетических материалов разработан вариант переходного участка пути из геосеток, основанный на замене грунта верхней части насыпи на щебень. Для исключения боковых деформаций балласта слои щебня разделяются полимерными сетками (рис. 3). Этот вариант представляет собой модификацию третьего способа: боковые стенки из габрионов заменены на геосетки.

Длина переходного участка принимается не менее 25 м. Число слоев геосетки – до пяти вблизи устья с постепенным сведением каждого слоя к обычному. При этом срезка грунта насыпи осуществляется в каждом сечении на расчетную глубину, обеспечивающую плавное изменение жесткости пути от устья к обычному пути на земляном полотне. Толщина слоя щебня между геосетками принимается 20–30 см, а длина участка с одинаковым количеством слоев геосетки – не менее 4,8 м. Каждый слой щебня нужно обязательно уплотнять. Для отвода воды от грунтов земляного полотна за задними стенками устьев устраивается дренаж, а поверхности формируемой основной площадки земляного полотна придается поперечный уклон 0,04 в полевую сторону.

Для решения указанной задачи предлагается моделировать состояние и поведение железнодорожного полотна пе-

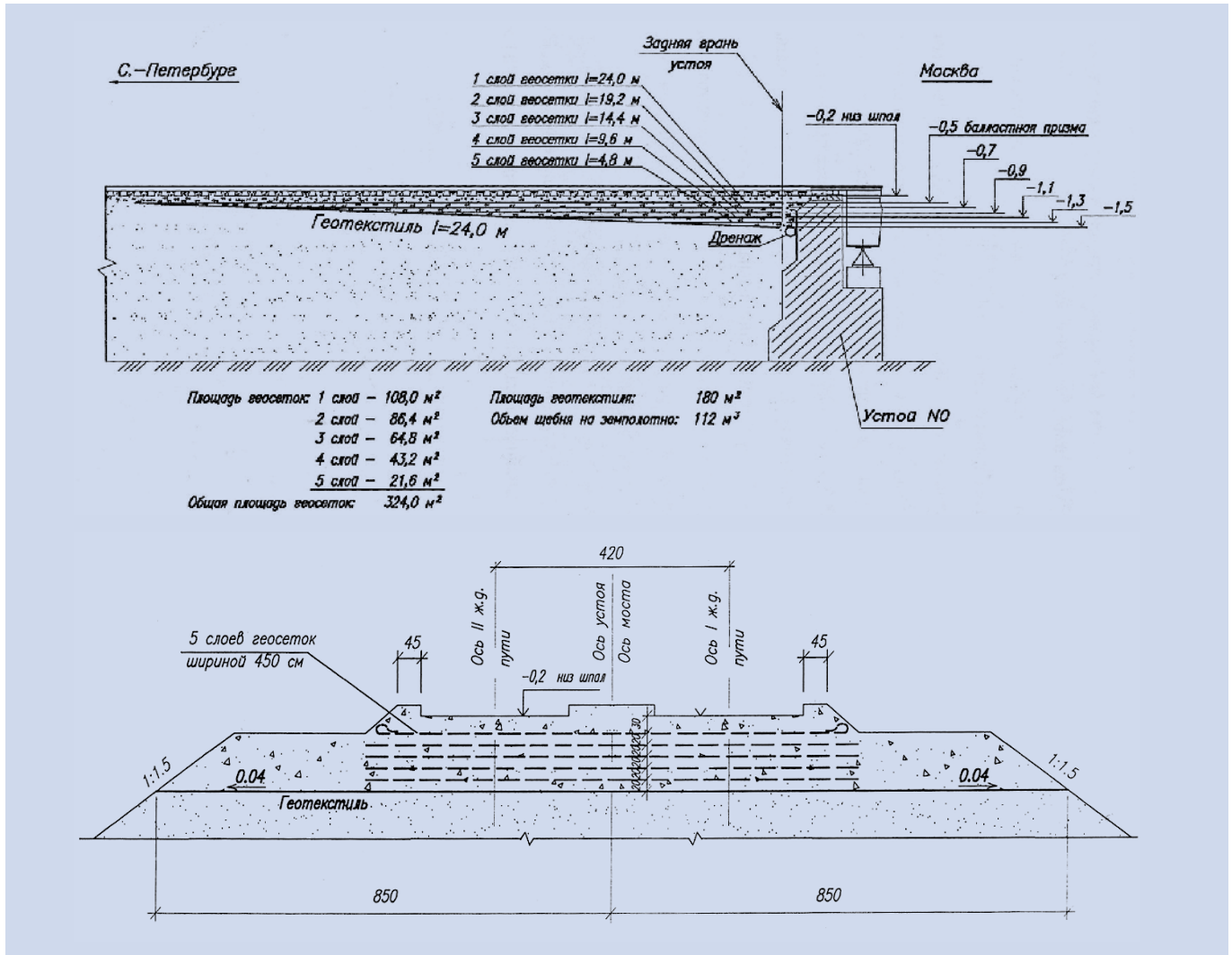


Рис. 3. Конструкция переменной жесткости при армировании щебня полимерными геосетками

ременной жесткости с помощью гиперболических уравнений, где учтены инерция вращения и деформация поперечного сдвига, описывающих динамическое поведение каждого плоского слоя конструкции пути, обладающего цилиндрической анизотропией [4, 5]:

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \theta^2} - \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \theta^2} + \frac{c_2 \sigma_r + c_3}{c_1 r} \frac{\partial^2 \psi}{\partial r \partial \theta} - \frac{c_2 + c_3}{c_1 r^2} \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} + \frac{12c_4}{c_1} \left(\frac{\partial w}{\partial r} - \varphi \right) = -\frac{\partial^2 \varphi}{\partial \tau^2} + M;$$

$$\frac{c_4}{c_1} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial r^2} - \frac{\partial \varphi}{\partial r} \right) + \frac{c_4}{c_1} \left(\frac{\partial w}{r \partial r} - \frac{\varphi}{r} \right) + \frac{c_4}{c_1} \left(\frac{\partial^2 w}{r^2 \partial \theta^2} - \frac{\partial \psi}{r \partial \theta} \right) = \frac{\partial^2 w}{\partial \tau^2} + q_1 \sin \alpha_1; \quad (1)$$

$$\left(\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} \right) + \frac{c_3}{c_1 r^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} - \frac{c_2}{c_1} \frac{u}{r^2} + \frac{c_2 \sigma_r + c_3}{c_1 r} \frac{\partial^2 v}{\partial r \partial \theta} - \frac{c_2 + c_3}{c_1 r^2} \frac{\partial v}{\partial \theta} = \frac{\partial^2 u}{\partial \tau^2} + q_1 \cos \alpha_1 \cos \alpha_2;$$

$$\frac{c_2}{c_1 r^2} \frac{\partial^2 v}{\partial \theta^2} + \frac{c_3}{c_1} \left(\frac{\partial^2 v}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial r} - \frac{v}{r^2} \right) + \frac{\sigma_\theta + c_3}{c_1 r} \frac{\partial^2 u}{\partial r \partial \theta} + \frac{c_2 + c_3}{c_1 r^2} \frac{\partial u}{\partial \theta} = \frac{\partial^2 v}{\partial \tau^2} + q_1 \cos \alpha_1 \sin \alpha_2;$$

$$\frac{c_3}{c_1} \left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial r} - \frac{\psi}{r^2} \right) + \frac{c_2}{c_1 r^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \theta^2} + \frac{\sigma_\theta + c_3}{c_1 r} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial r \partial \theta} + \frac{c_2 + c_3}{c_1 r^2} \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} + \frac{12c_5}{c_1} \left(\frac{\partial w}{r \partial \theta} - \psi \right) = -\frac{\partial^2 \psi}{\partial \tau^2};$$

где $c_1 = \frac{E_r}{(1 - \sigma_r \sigma_\theta) \rho}$;

$c_2 = \frac{E_\theta}{(1 - \sigma_r \sigma_\theta) \rho}$, $c_3 = \frac{G_{r\theta}}{\rho}$, $c_4 = \frac{KG_{r\tau}}{\rho}$, $c_5 = \frac{KG_{\theta z}}{\rho}$;

$q_1 = \frac{qh}{\rho c_1}$;

$$M = \frac{12qR_1 \cos \alpha_1}{\rho h c_1} = \frac{12R_1 \cos \alpha_1}{h^2} q_1;$$

R_1 – радиус сферического ударника,

q – нагрузка,

α_1, α_2 – углы направления удара в вертикальной и горизонтальной плоскости, соответственно,

$$D_r = \frac{h^3}{12} B_r, D_\theta = \frac{h^3}{12} B_\theta, D_k = \frac{h^3}{12} B_k, C_r = hB_r, C_\theta = hB_\theta, C_k = hB_k;$$

$$D_{r\theta} = D_r \sigma_\theta + 2D_k;$$

$$\tau = \frac{t \sqrt{c_1}}{h};$$

$$B_r = \frac{E_r}{1 - \sigma_r \sigma_\theta}, B_\theta = \frac{E_\theta}{1 - \sigma_r \sigma_\theta}, B_k = G_{r\theta};$$

$$E_r \sigma_r = E_\theta \sigma_\theta, K = \frac{5}{6};$$

D_r, D_θ и C_r, C_θ – соответственно, жесткости изгиба и растяжения-сжатия для направлений r, θ ;

D_k – жесткость кручения;

C_k – жесткость сдвига;

E_r, E_θ и σ_r, σ_θ – модуль упругости и коэффициент Пуассона для направлений r, θ , соответственно;

$G_{r\tau}, G_{\theta z}$ – модуль сдвига в плоскостях $r\tau$ и θz , соответственно;

$w(r, \theta)$ – нормальное перемещение срединной плоскости;
 $u(r, \theta)$ и $v(r, \theta)$ – тангенциальные перемещения срединной поверхности по координатам r, θ , соответственно;
 $\varphi(r, \theta)$ и $\psi(r, \theta)$ – произвольные искомые функции координат r, θ .

В уравнениях (1) через c_1, c_2, c_3, c_4, c_5 обозначены квадраты значений скорости, коэффициенты 1, 2 соответствуют продольным волнам растяжения-сжатия, распространяющимся в направлениях r и θ , соответственно, коэффициент 3 соответствует волне сдвига продольных сечений в плоскости $r\theta$, коэффициенты 4, 5 – поперечным волнам сдвига в плоскостях, перпендикулярных плоскостям $r\zeta, \theta z$, соответственно. Упругие волны образуются в плоском слое насыпи после начала взаимодействия колеса и рельса и распространяются от границ контактной области [5, 6]. Отметим, что в плоском элементе фронты упругих волн представляются поверхностями сильного разрыва. Такие поверхности можно моделировать цилиндрическими поверхностями-полосками, образующие которых параллельны нормали к срединной поверхности, т. е. оси z , а направляющие, расположенные в срединной плоскости, представляют собой окружности, расширяющиеся с нормальными скоростями $G^{(\alpha)}$ (индекс α означает номер волны, $\alpha = 1-3$ относятся к продольным, а $\alpha = 4, 5$ – к поперечным волнам).

За фронтами ударных волн некоторая искомая функция $Z(x_\alpha, t)$ представляется в виде лучевого ряда [5–7]. Лучевой метод основан на применении геометрических и кинематических условий совместности, предложенных Т. Томасом [8] и записанных для физических компонент в работе [9]. На границе области контакта колеса и рельса при $r = r_0$ искомую функцию можно представить в виде

$$Z(x_\alpha, t) = \sum_{\alpha=1}^2 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} [Z_{\gamma(k)}]_{t=0} t^k, \quad (2)$$

где Z – искомая функция перемещения, деформации или напряжения, $Z_{\gamma(k)} = \delta^k Z / \delta t^k$, $[Z_{\gamma(k)}] = Z_{\gamma(k)}^+ - Z_{\gamma(k)}^-$, знаки «+» и «-» относятся к значениям производной $Z_{\gamma(k)}$, подсчитанным перед волновым фронтом Σ и сразу после него соответственно,

t – время с момента зарождения волны, за которое ее фронт пройдет расстояние s с нормальной скоростью G .

Для определения коэффициентов лучевого ряда (2) для искомой функции (чаще всего это перемещения, в которых записаны определяющие уравнения (1)) необходимо продифференцировать определяющие волновые уравнения (1) для плоского слоя k раз по времени, взять их разность на различных сторонах волновой поверхности Σ и применить условие совместности для перехода от скачка производной от функции Z по координате к скачку производной от искомой функции по времени более высокого порядка [8, 9]:

$$G \left[\frac{\partial Z_{\gamma(k)}}{\partial s} \right] = - [Z_{\gamma(k+1)}] + \frac{\delta [Z_{\gamma(k)}]}{\delta t}, \quad (3)$$

где $\delta / \delta t$ – δ -производная по времени на поверхности волнового фронта.

Подходы к искусственным сооружениям в подавляющем большинстве расположены на прямых участках пути, поэтому задачу приложения динамической нагрузки от подвижного средства к верхнему строению пути с известной степенью точности можно считать осесимметричной. В этом случае уравнения (1) могут быть упрощены и для определения ди-

намических осадок и возникающих нормальных напряжений будет достаточно решить первые два уравнения системы, связанные между собой основными неизвестными. В результате из уравнений движения получаем систему рекуррентных дифференциальных уравнений, решив которую, можно найти скачки искомых величин с точностью до произвольных констант [4, 9, 10]:

$$\left(1 - \frac{\rho G^2}{B_r} \right) \omega_{\varphi(k+1)} = 2 \frac{\delta \omega_{\varphi(k)}}{\delta t} + Gr^{-1} \omega_{\varphi(k)} + b_r G X_{w(k)} + F_{\varphi(k-1)}; \quad (4)$$

$$\left(1 - \frac{\rho G^2}{KG_{rz}} \right) X_{w(k+1)} = 2 \frac{\delta X_{w(k)}}{\delta t} + Gr^{-1} X_{w(k)} - G \omega_{\varphi(k)} + F_{w(k-1)}; \quad (5)$$

$$\text{где } X_{w(k)} = [w_{r(k+1)}];$$

$$\omega_{\varphi(k)} = [\varphi_{r(k+1)}];$$

$$b_r = h K G_{rz} D_r^{-1};$$

$$r = r_0 + Gt;$$

$$F_{\varphi(k-1)} = - \frac{\delta^2 \omega_{\varphi(k-1)}}{\delta t^2} - Gr^{-1} \frac{\delta \omega_{\varphi(k-1)}}{\delta t} + G^2 r^{-2} \frac{E_\theta}{E_r} \omega_{\varphi(k-1)} - b_r G \frac{\delta X_{w(k-1)}}{\delta t} + b_r G^2 \omega_{\varphi(k-1)};$$

$$F_{w(k-1)} = - \frac{\delta X_{w(k-1)}}{\delta t} - Gr^{-1} \frac{\delta X_{w(k-1)}}{\delta t} + G \frac{\delta \omega_{(k-1)}}{\delta t} + G^2 r^{-1} \omega_{(k-1)}$$

Ограничимся в дальнейшем пятью членами лучевого ряда для искомых функций, что позволит определить их с необходимой точностью.

Полагая в (4), (5) $k = -1, 0, 1, 2, 3$, получим скачки соответствующего порядка на первой волне.

Аналогичным образом определяются скачки неизвестных величин – коэффициенты лучевого ряда (2) на второй волне [5, 11].

Найденные скачки позволяют записать выражения для искомых функций W и Q , в виде отрезков лучевых рядов:

$$W \equiv \sum_{\alpha=1}^2 \sum_{k=0}^4 \frac{1}{k!} X_{w(k)}^{(\alpha)} (y_\alpha)^k H(y_\alpha), \quad (6)$$

$$Q_r \equiv K G_{rz} h \sum_{\alpha=1}^2 \sum_{k=0}^4 \frac{1}{k!} \left(-X_{w(k)}^{(\alpha)} G^{(\alpha)-1} + \frac{\delta X_{w(k-1)}^{(\alpha)}}{\delta t} G^{(\alpha)-1} - \omega_{\varphi(k-1)}^{(\alpha)} \right) (y_\alpha)^k H(y_\alpha), \quad (7)$$

$$\text{где } y_\alpha = t - (r - r_0) G^{(\alpha)-1},$$

значения $X_{w(k)}^{(\alpha)}, \omega_{\varphi(k)}^{(\alpha)}$ и их δ -производные вычисляются исходя из предположения $y_\alpha = 0$.

Таким образом определяются искомые функции с точностью до произвольных постоянных c_i^α ($\alpha = 1, 2$) ($i = 0, 1, \dots, 4$), которые входят из граничных условий на границе контактной области.

Граничные условия определяются решением контактной задачи по взаимодействию «колесо – рельс». Скорость экипажа, реальные нагрузки на ось, а также дефекты колесной пары и рельса варьируются в широком диапазоне значений, поэтому предлагается рассмотреть несколько моделей динамического взаимодействия:

$$1) \text{ квазистатическая модель Герца [4, 9]: } P = k \alpha^{3/2}; \quad (8)$$

$$2) \text{ линейно-упругая модель [5, 11]: } P = E_1 (\alpha - w); \quad (9)$$

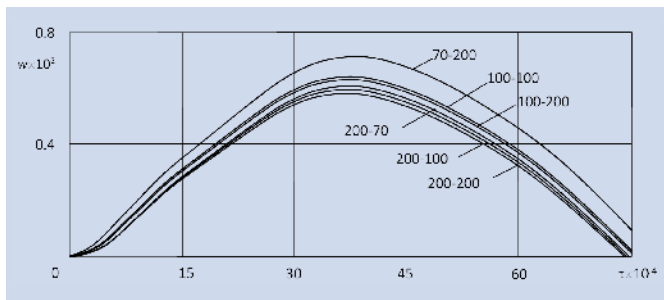


Рис. 4. Зависимость динамической осадки в месте взаимодействия колеса и рельса от времени для различных значений модулей упругости

3) вязкоупругая модель [11]

$$P(t) = E_1(\alpha - w) - \frac{E_1}{\tau_1} \int_0^t (\dot{\alpha} - \dot{w}) e^{-\frac{t-t'}{\tau_1}} dt'; \quad (10)$$

4) упругопластическая модель Александрова – Кадомцева [6, 12]:

$$\alpha = \begin{cases} bP^{2/3}, & dP/dt > 0, P_{\max} < P_1; \\ (1 + \beta)c_1 + (1 - \beta)Pd, & dP/dt > 0, P_{\max} > P_1; \\ b_f P^{2/3} + \alpha_p(P_{\max}), & dP/dt < 0, P_{\max} > P_1; \end{cases} \quad (11)$$

В выражениях (9)–(11) α – местное смятие материалов рельса и колеса, k – коэффициент, значения которого зависят от геометрических параметров контактирующих тел и упругих характеристик их материалов;

E_1 – модуль упругости в зоне контакта;

w – прогиб рельса, $\lambda=5,7$;

$$b = \left(\frac{9\pi^2 (k_1 + k)^2}{16R} \right)^{1/3};$$

$$P_1 = \chi^3 (3R (k_1 + k) / 4)^2;$$

$$d = 1/2 \chi R;$$

$$b_f = R_f^{-1/3} (3(k_1 + k) / 4)^{2/3};$$

$$R_p^{-1} = R^{-1} - R_f^{-1};$$

$$R_f = (4/3 (k_1 + k)) P_{\max}^{1/2} \chi^{-3/2};$$

$$\alpha_p(P_{\max}) = (1 - \beta) P_{\max} (2\chi R_p)^{-1};$$

$$\beta = 0.33;$$

$$c_1 = 3\chi^{1/2} (k_1 + k) / 8;$$

k_{pl} – наименьшая из пластических констант взаимодействующих тел;

σ_1, E_1 – коэффициент Пуассона и модуль упругости для колесной пары [2, 8];

$$\tau_1 = \eta_1 / E_1,$$

τ_1 – время релаксации для вязкоупругой модели;

η_1 – коэффициент вязкого сопротивления.

Подставляя выражения (6), (7) и соотношения (8)–(11) в систему, определяющую процесс движения колеса и рельса после начала воздействия;

$$m \left(\ddot{\alpha} + \ddot{w} \right) = -P(t), \rho h \pi r_0^2 \ddot{w} = 2\pi r_0 Q_r + P(t), \left. \frac{\partial W}{\partial r} \right|_{r=r_0} = 0; \quad (12)$$

можно определить все динамические характеристики воздействия подвижного состава на экипаж. Данная система решается с использованием начальных условий

$$\dot{\alpha}|_{t=0} = V_0, \dot{w}|_{t=0} = 0. \quad (13)$$

Результаты решения системы уравнений (13) и численного моделирования задачи воздействия экипажа и железнодорожного пути представлены на рис. 4 (для случая линейно-упругого взаимодействия колеса и рельса). Приведены зависимости динамической осадки верхнего строения пути от времени для различных значений модулей упругости (100*МПа), модули сдвига принимают следующие значения: $G_{r\theta} = G_{rz} = G_{\theta z} = 70$ (100*МПа).

Таким образом, предложенная модель поведения конструкции железнодорожного пути в виде сочлененных упругих плоских слоев позволила учесть реологические свойства верхнего строения пути, балластной призмы и земляного полотна, а также колебательные и волновые процессы в полотне под действием динамической подвижной нагрузки. Предлагаемый подход дает возможность проанализировать влияние упругих характеристик материалов полотна в различных направлениях анизотропии (вдоль рельсов, вдоль шпал и вертикально) на осадку и возникающие напряжения. Совместное рассмотрение этих параметров позволит оптимально определить характеристики полотна для совмещенного движения составов. ■

Литература

1. Шахуняц Г. М. Расчеты верхнего строения пути. М.: Трансжелдориздат, 1959. 264 с.
2. Коган А. Я. Расчеты железнодорожного пути на вертикальную динамическую нагрузку // Тр. ВНИИЖТ. 1973. Вып. 502. 80 с.
3. Локтев А. А., Крамчанинов В. В. Моделирование основных этапов жизненного цикла комплекса путевых машин // Наука, техника, транспорт. 2015. № 3. С. 47–56.
4. Локтев А. А., Залетдинов А. В., Сычева А. В. Расчет осадки полотна железнодорожного пути от действия динамической нагрузки с помощью лучевого метода // Нелинейный мир. 2013. № 11. С. 67–76.
5. Локтев А. А., Бучкин В. А., Виноградов В. В. Модели взаимодействия колеса и рельса при высоких скоростях движения // Мир транспорта. 2016. № 2. С. 56–63.
6. Abrate S. Localized impact on sandwich structures with laminated facing // Appl. Mechanics Rev. 1997. Vol. 50, No. 2. P. 69–82.
7. Olsson R., Donadon M. V., Falzon B. G. Delamination threshold load for dynamic impact on plates // Int. J. Solids and Struct. 2006. Vol. 43. P. 3124–3141.
8. Thomas T. Y. Plastic Flow and Fracture in Solids. NY; L: Acad. Press, 1961.
9. Achenbach J. D., Reddy D. P. Note on wave propagation in linear viscoelastic media // Z. Angew. Math. Phys. 1967. Vol. 18. P. 141–144.
10. Agostinacchio M., Ciampa D., Diomedei M., Olita S. Parametrical analysis of the railways dynamic response at high speed moving loads // J. Modern Transp. 2013. Vol. 21. № 3. P. 169–181.
11. Christoforou A. P., Elsharkawy A. A., Guedouar L. H. An inverse solution for low-velocity impact in composite plates // Comp. and Structur. 2001. Vol. 79. P. 2607–2619.
12. Локтев А. А., Виноградов В. В., Быков Ю. А. Определение мест армирования железобетонной плиты безбалластного пути // Наука и техника транспорта. 2016. № 1. С. 64–71.